4. ESPACIOS VECTORIALES Y APLICACIONES LINEALES

SUMARIO:

INTRODUCCIÓN

Aunque ya se ha trabajado con un espacio vectorial, el de las matrices cuadradas sobre el cuerpo de los reales o los complejos, hasta ahora no se ha definido dicha estructura. En este tema introducimos la estructura de espacio vectorial, que es la estructura básica del Algebra Lineal. Se trata de enriquecer la estructura de grupo abeliano (definida en el capítulo 2) con una ley de composición externa: el producto por escalares. Para presentar de una forma intuitiva la nueva estructura, se comienza con los ejemplos geométricos de los vectores libres del plano o del espacio físico. Se hace ver entonces al alumno que existen otros objetos matemáticos, tales como las matrices reales de un cierto orden mxn o los polinomios de coeficientes reales de grado no superior a n dado, para los cuales también es posible la suma y el producto por escalares. Además, en los tres casos (vectores, matrices y polinomios) dichas operaciones comparten las mismas propiedades algebraicas. Surge así, de manera natural, la estructura de espacio vectorial sobre un cuerpo K.

OBJETIVOS

- Asimilar el concepto de espacio vectorial y las propiedades más notables que son consecuencia de los axiomas definitorios de la estructura.
- Reforzar el conocimiento de la estructura comprobando que son espacios vectoriales reales los conjuntos: $\mathbb{R}$, los polinomios en la indeterminada x con coeficientes números reales y de grado

menor o igual que n, las funciones reales continuas, las matrices reales de orden mxn etc.

- Obtener combinaciones lineales de vectores de un subconjunto dado en un espacio vectorial y conocer las propiedades que verifican. Decidir si un vector es expresable, o no, como combinación lineal de otros.
- Conocer la posibilidad de generar un subespacio vectorial a partir de un subconjunto cualquiera de vectores de un espacio vectorial.
- Decidir con soltura si un sistema de vectores es libre o ligado.
- Determinar con destreza el rango de un conjunto de vectores.
- Asimilar el concepto de base y dimensión para un subespacio y para el propio espacio.
- Decidir sobre la posibilidad de expresar un espacio vectorial como suma directa de dos subespacios propios.
- Manejar los cambios de bases.
- Verificar que un homomorfismo entre espacios vectoriales está determinado con sólo conocer las imágenes de los vectores de una base.
- Utilizar la correspondencia entre operaciones con aplicaciones lineales y operaciones con matrices.
- Decidir con soltura si un homomorfismo es inyectivo, sobreyectivo o biyectivo.

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

1. ESPACIOS VECTORIALES

Sea K un cuerpo conmutativo con leyes suma y producto a cuyos elementos llamaremos escalares. Sea E un conjunto a cuyos elementos los llamaremos vectores, denotándolos $\overline{x}$, $\overline{y}$, etc.

E es un espacio vectorial sobre el cuerpo K si se verifica:

Existe una ley de composición interna en E, para la cuál E tiene estructura de grupo abeliano (denotaremos esta ley por suma y al elemento neutro por el vector $\overline{0}$), debiendo por tanto verificar:

$\overline{x}+\overline{y}\in E$, $\forall\overline{x},\ \overline{y}\in E$ ($+$ es una ley de composición interna)

$\left(\overline{x}+\overline{y}\right)+\overline{z}=\overline{x}+\left(\overline{y}+\overline{z}\right),\ \forall\overline{x},\ \overline{y},\overline{z}\in E$ (propiedad asociativa)

$\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$, $\forall\overline{x},\ \overline{y}\in E$ (propiedad conmutativa)

$\forall\overline{x}\in E\Rightarrow\exists\ \overline{0}\in E:\overline{x}+\overline{0}=\overline{x}$ (el $\overline{0}$ es el elemento neutro).

$\forall\overline{x}\in E\Rightarrow\exists-\overline{x}\in E:\overline{x}+\left(-\overline{x}\right)=\overline{0}$ (existencia de elemento opuesto)

Existe sobre E una ley de composición externa, cuyo dominio de operadores es el cuerpo K, con las siguientes propiedades $(\forall\lambda,\mu\in K,\ \forall\overline{x},\overline{y}\in E)$:

(a) Distributiva respecto a la suma de escalares: $\left(\lambda+\mu\right)\overline{x}=\lambda\overline{x}+\mu\overline{x}$

(b) Distributiva respecto a la suma de vectores: $\lambda\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=\lambda\overline{x}+\lambda\overline{y}$

(c) Asociativa respecto a los escalares: $\lambda\left(\mu\overline{x}\right)=\left(\lambda\mu\right)\overline{x}$

(d) Identidad: $1 \cdot \overline{x} = \mathbf{I}_E = \overline{x}$.

NOTA: Si no se hace mención contraria, K será el cuerpo de los números reales con las operaciones usuales, suma y producto en los números reales.

2. PROPIEDADES DE UN ESPACIO VECTORIAL

Las principales propiedades de un espacio vectorial son las siguientes:

$\forall \overline{x} \in E : 0 \cdot \overline{x} = \overline{0}$

$\forall \ \lambda \in K : \ \lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$

Si $\lambda \cdot \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \lambda = 0$ ó $\overline{x} = \overline{0}$

$\forall \ \lambda \in K, \ \forall \overline{x} \in E : (-\lambda)\overline{x} = -\lambda\overline{x} = \lambda\left(-\overline{x}\right)$

2.1. Sistema de Vectores

Un sistema de vectores es un conjunto (trabajaremos siempre con un número finito) de vectores, lo representaremos por: $S = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$.

2.2. Combinación Lineal

Un vector $\overline{x} \in E$ es una combinación lineal de los vectores del sistema S si existen n escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ tal que: $\overline{x} = \lambda_1 \overline{x}_1 + \lambda_2 \overline{x}_2 + \ldots + \lambda_n \overline{x}_n$. Los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los "coeficientes" de la combinación lineal.

2.3. Sistemas linealmente dependientes o independientes

Un sistema $S=\{\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n\}$ de vectores es linealmente independientes, si la condición $\overline{x}=\lambda_1\,\overline{x}_1+\lambda_2\,\overline{x}_2+\ldots+\lambda_n\,\overline{x}_n=\overline{0}$, implica necesariamente que: $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.

En caso contrario, el sistema S es linealmente dependiente.

2.4. Proposición.

En un sistema linealmente independiente S la única posibilidad de conseguir una combinación lineal de vectores de S igualada al vector $\overline{0}$ es que todos los coeficientes de dicha combinación deben ser 0, no siendo así si el sistema linealmente dependiente.

3. PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LINEALMENTE DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Las principales propiedades de los sistemas linealmente dependientes o independientes son las siguientes:

$\overline{x}\neq\overline{0}\Rightarrow$ el sistema $S=\left\{\overline{x}\right\}$ es linealmente independiente.

Si un sistema S es linealmente independiente, cualquier sistema $S^{'}$ extraído de él ($S^{'}\subset S$) también lo es.

Todo sistema S que contenga al vector $\overline{0}$ es linealmente dependiente

Si un sistema S es linealmente dependiente, todo sistema $S^{'}$ que lo contenga ($S^{'}\supset S$) también lo es.

Si un sistema S es linealmente dependiente, al menos uno de los vectores de S es combinación lineal de los restantes vectores de S.

Si un sistema S es linealmente independiente y el sistema $S' = S \cup \{\overline{x}\}$ es linealmente dependiente, entonces el vector $\overline{x}$ es combinación lineal de los vectores de S.

3.1. V(S)

Si S es un sistema de vectores, $\langle S \rangle$ denotará el conjunto de vectores que son combinación lineal de vectores de S.

3.2. Sistemas Equivalentes

Dos sistemas de vectores S_1 y S_2 son equivalentes si $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$.

Las principales formas para obtener un sistema equivalente a uno dado son:

Añadir al sistema nuevos vectores que sean combinación lineal de los existentes.

Cambiando el orden de los vectores del sistema.

Multiplicando cualquier vector por un escalar distinto de 0.

Sumando a un vector del sistema otro del mismo multiplicado por cualquier escalar.

4. SUBESPACIOS VECTORIALES. OPERACIONES CON SUBESPACIOS

4.1. Subespacio vectorial

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Todo subconjunto V de E, que tenga estructura de espacio vectorial con las mismas leyes que E, diremos que es un subespacio vectorial de E.

4.2. Propiedad

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea V un subconjunto de E, entonces V es un subespacio vectorial de E si y sólo si:

$\overline{x}+\overline{y}\in V, \quad \forall \overline{x},\overline{y}\in V$.

$\lambda\overline{x}\in V$, $\forall \overline{x}\in V$ y $\forall \lambda \in K$

Esta propiedad también se podría enunciar de la siguiente forma:

4.3. Propiedad:

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea V un subconjunto de E, entonces V es un subespacio vectorial de E si y sólo si:

$\forall \lambda,\mu\in K, \ \forall \overline{x},\overline{y}\in V : \lambda\overline{x}+\mu\overline{y}\in V$

4.4. Intersección de Subespacios vectoriales

Dados dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 de E se define su intersección como:

$V_1 \cap V_2 = \left\{\overline{x}\in E \,/\, \overline{x}\in V_1 \text{ y } \overline{x}\in V_2\right\}$

El conjunto $V_1 \cap V_2$ es un subespacio vectorial de E.

4.5. Subespacios Disjuntos

Dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 son disjuntos si y sólo si $V_1 \cap V_2 = \left\{\overline{0}\right\}$.

4.6. Suma de subespacios vectoriales

Dados dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 de E, se define su suma:

$V_1 + V_2 = \left\{ \overline{x} \in E / \overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 \text{, con } \overline{x}_1 \in V_1 \text{ y } \overline{x}_2 \in V_2 \right\}$

$V_1 + V_2$ es un subespacio vectorial.

Si $V_1 \cap V_2 = \left\{ \overline{0} \right\}$, la suma se llama directa y se denota por $V_1 \oplus V_2$.

Si $V_1 \oplus V_2 = E$, V_1 y V_2 se llaman subespacios suplementarios.

4.7. Propiedad

Si un espacio vectorial E es suma directa de dos subespacios V_1 y V_2, todo vector de E se puede expresar de forma única como suma de un vector de V_1 y otro de V_2.

Importante: La unión de subespacios vectoriales no es en general subespacio vectorial.

4.8. Sistema generador

Un sistema S de vectores de V es un sistema generador del subespacio vectorial $V \subset E$ si $\langle S \rangle = V$.

NOTAS: Las formas más usuales de expresar un subespacio V suelen ser:

Dando un sistema S generador de V, es decir, $\langle S \rangle = V$.

Dando las ecuaciones "implícitas" , que equivale a dar restricciones a las "coordenadas" de los vectores de E para que estén en V.

Por ejemplo, si $E = \mathbb{R}^3$, podemos considerar el subespacio $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y + z = 0 \right\}$

Dando las ecuaciones paramétricas, que expresan las coordenadas de los vectores de V en función de parámetros que pueden tomar cualquier valor de los escalares de K.

Por ejemplo, si $E=\mathbb{R}^3$, podemos considerar el subespacio

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\begin{array}{l} x=\lambda+\beta \\ y=\lambda \\ z=\beta \end{array} :\lambda,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

El paso de unas a otras se realiza de forma cómoda por medio de la teoría de sistemas de ecuaciones lineales que veremos posteriormente.

5. Bases de un Espacio Vectorial. Dimensión

5.1. Base de un espacio vectorial

Una base de un espacio vectorial E es cualquier sistema S de vectores libres que sean generadores de E.

5.2. Teorema

Todo espacio vectorial admite al menos una base

NOTA:

Un espacio que admite un sistema finito de generadores se dice que es de tipo finito o finitamente generado.

5.3. Teorema

En un espacio vectorial de tipo finito todas las bases son finitas y tienen el mismo número de elementos.

5.4. Dimensión

Al número de elementos de una base de un espacio vectorial de tipo finito, se le llama dimensión del espacio vectorial.

5.5. Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\cdots,\overline{v}_n\}$ una base suya. Si divido B en dos sistemas de vectores disjuntos $B=B_1\cup B_2$, entonces se cumple que $\langle B_1\rangle\oplus\langle B_2\rangle=V$. Es decir, los subespacios generados por los sistemas B_1 y B_2 son suplementarios.

5.6. Coordenadas de un vector en una base

Sea $B=\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\}$ una base del espacio vectorial E y $\overline{x}\in E$. Si $\overline{x}=x_1\overline{e}_1+x_2\overline{e}_2+\ldots+x_n\overline{e}_n$ se dice que $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ son las coordenadas del vector $\overline{x}$ en la base B.

Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.

NOTA: Un vector tiene tantas coordenadas como la dimensión del mayor espacio vectorial al que pertenece.

En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$ la base $B=\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\}$ con $\overline{e}_1^{\,t}=(10\ldots0)$, $\overline{e}_2^{\,t}=(0\;1\;0\ldots0),\ldots,\overline{e}_n^{\,t}=(0\;0\ldots0\;1)$ la llamaremos base canónica.

5.7. Rango de un sistema de vectores.

El rango de un sistema S de vectores es la dimensión del subespacio $\langle S \rangle$ engendrado por S. Es decir, es el máximo número de vectores linealmente independientes de S.

Otro procedimiento para calcular el rango de un sistema de vectores S es construir una matriz situando las coordenadas de cada uno de los vectores de S en columnas, es decir, si $S = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_p\}$, la matriz asociada es

$$A = \left[\overline{x}_1\ \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_p\right],\ \text{siendo}\ \overline{x}_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ x_i^n \end{pmatrix},\ \forall i = 1, 2, \ldots, p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(\langle S \rangle) = rang(S) = rang(A)$$

5.8. Base Incompleta

Sea E un espacio vectorial de dimensión n y V un subespacio vectorial de E de dimensión m. Si $B = \{\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots, \overline{c}_m\}$ es una base de V, se puede encontrar una base B' de E ampliando la de V, es decir:

$$B' = \{\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots, \overline{c}_m, \overline{e}_{m+1}, \overline{e}_{m+2}, \ldots, \overline{e}_n\}$$

6. Relación entre dimensiones

Si V es un subespacio vectorial de E, $\dim(V) \leq \dim(E)$.

Si $V = \{\overline{0}\}$, $\dim(V) = 0$.

Si V_1 y V_2 son subespacios vectoriales de V se tiene que:

$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2) \equiv$

$\equiv$ Fórmula de Grassman

En particular se tiene que si V_1 es suma directa con V_2 :

$\dim(V_1\oplus V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)$

7. CAMBIO DE BASE

Sea E un espacio vectorial de $\dim(E)=n$, sean $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_n\}$ y $B'=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\ldots,\overline{u}_n\}$ dos bases de E. Supongamos que el vector $\overline{x}\in E$, tiene de coordenadas $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ respecto de la base B y tiene unas coordenadas $(x_1',x_2',\ldots,x_n')$ respecto de la base B'. Vamos a estudiar cómo se pueden obtener las coordenadas de un vector en una base conociendo sus coordenadas en la otra base.

Por ser B' base de E, sus elementos son vectores de E, por lo que se podrán expresar como combinación lineal de los vectores de la base B:

$\overline{u}_1=a_{11}\overline{v}_1+a_{21}\overline{v}_2+\cdots+a_{n1}\overline{v}_n$

$\overline{u}_2=a_{12}\overline{v}_1+a_{22}\overline{v}_2+\cdots+a_{n2}\overline{v}_n$

$\vdots$

$\overline{u}_n=a_{1n}\overline{v}_1+a_{2n}\overline{v}_2+\cdots+a_{nn}\overline{v}_n$

Sabemos que $\overline{x}=x_1\overline{v}_1+x_2\overline{v}_2+\ldots+x_n\overline{v}_n$ y $\overline{x}=x_1'\overline{u}_1+x_2'\overline{u}_2+\ldots+x_n'\overline{u}_n$. Si sustituimos los datos conocidos obtenemos que:

$\overline{x}=x_1'\overline{u}_1+x_2'\overline{u}_2+\ldots+x_n'\overline{u}_n=$

$$= x_1'\left(a_{11}\overline{v}_1 + a_{21}\overline{v}_2 + \cdots + a_{n1}\overline{v}_n\right) + x_2'\left(a_{12}\overline{v}_1 + a_{22}\overline{v}_2 + \cdots + a_{n2}\overline{v}_n\right) +$$

$$+ \cdots + x_n'\left(a_{1n}\overline{v}_1 + a_{2n}\overline{v}_2 + \cdots + a_{nn}\overline{v}_n\right) =$$

$$= \left(x_1'a_{11} + x_2'a_{12} + \cdots + x_n'a_{1n}\right)\overline{v}_1 + \left(x_1'a_{21} + x_2'a_{22} + \cdots + x_n'a_{2n}\right)\overline{v}_2 +$$

$$+ \cdots + \left(x_1'a_{n1} + x_2'a_{n2} + \cdots + x_n'a_{nn}\right)\overline{v}_n =$$

$$= x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2 + \ldots + x_n\overline{v}_n$$

De todas estas igualdades obtenemos que si igualamos coordenada a coordenada, queda la siguiente relación:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = x_1'a_{11} + x_2'a_{12} + \cdots + x_n'a_{1n} \\ x_2 = x_1'a_{21} + x_2'a_{22} + \cdots + x_n'a_{2n} \\ \vdots \\ x_n = x_1'a_{n1} + x_2'a_{n2} + \cdots + x_n'a_{nn} \end{array}\right\} \equiv \text{ Ecuaciones del Cambio de Base}$$

Expresando este sistema de forma matricial, quedaría:

$\overline{x} = P\overline{x}' \equiv$ Ecuación Matricial del Cambio de Base

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \overline{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ $\equiv$ Matriz Cambio de Base de B' a B, sus columnas son las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B.

7.1. Espacio Vectorial Producto

Sean E y F espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K.

Al conjunto $E \times F$ le dotamos de estructura de espacio vectorial con las leyes:

$$\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)+\left(\overline{v}_1,\overline{v}_2\right)=\left(\overline{u}_1+\overline{v}_1,\overline{u}_2+\overline{v}_2\right);\ \forall \overline{u}_1,\overline{v}_1\in E;\ \ \forall \overline{u}_2,\overline{v}_2\in F$$

$$\lambda\left(\overline{u},\overline{v}\right)=\left(\lambda\overline{u},\lambda\overline{v}\right);\ \forall\lambda\in K;\ \ \forall\overline{u}\in E;\ \forall\overline{v}\in F$$

Dicho espacio vectorial se denomina espacio vectorial producto de E y F .

Siendo $\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\}$ una base de E y $\{\overline{w}_1,\overline{w}_2,\ldots,\overline{w}_m\}$ una base de F , la dimensión $E\times F$ es $n+m$ y una base de $E\times F$ puede ser:

$$\left\{(\overline{e}_1,0),(\overline{e}_2,0),\ldots,(\overline{e}_n,0),(0,\overline{w}_1),(0,\overline{w}_2),\ldots,(0,\overline{w}_m)\right\}$$

8. APLICACIONES LINEALES

8.1. Aplicación Lineal

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y $f:E \longrightarrow F$ una aplicación.

f es una aplicación lineal si verifica:

$$f\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=f\left(\overline{x}\right)+f\left(\overline{y}\right),\forall\ \overline{x},\overline{y}\in E$$

$$f\left(\lambda\overline{x}\right)=\lambda f\left(\overline{x}\right),\ \forall\lambda\in K,\ \forall\ \overline{x}\in E$$

8.2. Propiedad

f es un homomorfismo o aplicación lineal si y sólo si:

$$f\left(\lambda\overline{x}+\mu\overline{y}\right)=\lambda f\left(\overline{x}\right)+\mu f\left(\overline{y}\right),\ \forall\lambda,\mu\in K,\ \forall\overline{x},\overline{y}\in E$$

8.3. Propiedades de las Aplicaciones Lineales

Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E y F, entonces:

$f\left(\overline{0}\right) = \overline{0}$

$\forall \overline{x} \in E, f(-\overline{x}) = -f(\overline{x})$

Si V es un espacio vectorial de E, entonces $f(V)$ es un subespacio vectorial de F. En particular, $f(E)$ recibe el nombre de subespacio imagen de f. Se suele denotar por $Im(f)$.

Si S es un sistema de generadores de un subespacio vectorial V de E, entonces $f(S)$ es un sistema de generadores del subespacio vectorial $f(V)$. Por lo tanto, f es sobreyectiva si y sólo si, la imagen de una base B de E, $f(B)$, es un sistema generador de F.

Si V es un subespacio de F, $f^{-1}(V)$ es un subespacio de E.

9. NOMENCLATURA

Sea $f: E \longrightarrow F$ un homomorfismo:

Si $E = F$, a f se le denomina endomorfismo.

Si f es inyectivo, se denomina monomorfismo.

Si f es biyectivo recibe el nombre de isomorfismo

Un endomorfismo biyectivo se llama automorfismo.

9.1. Núcleo

Se llama núcleo de una aplicación lineal f, designándose $Ker(f)$ ó $N(f)$, al siguiente subconjunto de E:

$Ker(f) = \left\{ \overline{x} \in E \;/\; f(\overline{x}) = \overline{0} \right\}$.

9.2. Propiedades del Núcleo

Las principales propiedades del núcleo son las siguientes:

$Ker(f)$ es un subespacio vectorial de E.

f es un homomorfismo inyectivo si y sólo si $Ker(f) = \left\{ \overline{0} \right\}$

$Ker(f) = \left\{ \overline{0} \right\}$ si y sólo si la imagen de cualquier sistema libre de E es un sistema libre de F.

9.3. Propiedad.

Si la restricción de f a un subespacio V de E es inyectivo y S es un sistema libre de V entonces $f(S)$ es un sistema libre del subespacio $f(V) \subset F$.

9.4. Rango de una aplicación lineal

Una aplicación lineal queda determinada conociendo las imágenes de los vectores de una base de E.

Si $B = \left\{ \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n \right\}$ es una base de E y conocemos $\left\{ f(\overline{e}_1), f(\overline{e}_2), \ldots, f(\overline{e}_n) \right\}$, vectores de F, la imagen de cualquier vector $\overline{x}$ de coordenadas $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n \right)$ en la base B será:

$$f(\overline{x}) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ f(\overline{e}_i).$$

IMPORTANTE: Podría parecer que no siempre se expresa el homomorfismo por medio de las imágenes de una base, pero dicha información siempre se puede obtener y esto será de utilidad para enlazar homomorfismos y matrices como veremos a continuación.

10. MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensiones n y m, $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ una base de E, $B_F' = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_m\}$ una base de F.

Sea $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i$, $\quad f(\overline{x}) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \ f(\overline{e}_i) \overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{m} y_j \overline{u}_j$. Si:

$$\left.\begin{array}{lllll} f(\overline{e}_1) = & a_{11}\overline{u}_1 & +a_{21}\overline{u}_2 & +\ldots+ & a_{m1}\overline{u}_m \\ f(\overline{e}_2) = & a_{12}\overline{u}_1 & +a_{22}\overline{u}_2 & +\ldots+ & a_{m2}\overline{u}_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(\overline{e}_n) = & a_{1n}\overline{u}_1 & +a_{2n}\overline{u}_2 & +\ldots+ & a_{mn}\overline{u}_m \end{array}\right\}.$$

(1) Por las propiedades de aplicación lineal.

(2) Ya que $f(\overline{x})$ es un vector de F se podrá poner como combinación lineal de la base B_F'.

Se tiene que: $\overline{y} = P\overline{x}$, siendo:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde:

$\overline{y}$ es la matriz columna que representa las coordenadas de $f(\overline{x})$ en la base $B_F^{'}$;

$\overline{x}$ es la matriz columna que representa las coordenadas de $\overline{x}$ en la base B;

P es la matriz del homomorfismo en las bases B y $B_F^{'}$ (o con respecto a las bases B y $B_F^{'}$).

Las columnas de la matriz A son las coordenadas de los vectores $f(\overline{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ respecto de la base $B_F^{'}$. P es una matriz de orden $m \times n$.

Fijadas las bases B y $B_F^{'}$, la matriz del homomorfismo es única.

NOTA: Si utilizamos matrices fila para las componentes de $\overline{x}$ y de $f(\overline{x})$, la matriz del homomorfismo sería la traspuesta de la obtenida anteriormente.

11. OPERACIONES CON HOMOMORFISMOS Y SUS MATRICES ASOCIADAS.

Sean E y F dos espacios vectoriales, B una base de E, $B^{'}$ una base de F. Sean f y g dos homomorfismos de E en F, siendo sus matrices sociadas (respecto a las bases B y $B^{'}$), A y C respectivamente.

Al homomorfismo $f + g : E \longrightarrow F$ definido por:

$(f + g)\left(\overline{x}\right) = f\left(\overline{x}\right) + g\left(\overline{x}\right),\ \forall \overline{x} \in E$,

le corresponde la matriz $A + C$.

Al homomorfismo $\lambda \cdot f : E \longrightarrow F$,(producto escalar), definido por:

$\left(\lambda \cdot f\right)\left(\overline{x}\right) = \lambda \ f\left(\overline{x}\right), \ \forall \overline{x} \in E$,

le corresponde la matriz λA.

Con estas dos operaciones, el conjunto de homomorfismos entre los espacios vectoriales E y F, denotado por $L(E,F)$, tiene estructura de espacio vectorial, isomorfo al espacio vectorial de las matrices $M_{m\times n}$.

Por tanto, la dimensión del espacio $L(E,F)$ es $m \cdot n$.

NOTA: Fijada una matriz $A \in M_{m\times n}$, siempre es posible encontrar una base B_E en E y una base B_F en F, respecto de las cuales la matriz asociada a la aplicación linea $f : E \longrightarrow F$ es A.

Sean E un espacio vectorial de dimensión n y B una base de E, F un espacio vectorial de dimensión m y B_F una base de F, y G un espacio vectorial de dimensión p y B_G una base de G.

Se consideran las aplicaciones lineales siguientes: $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ y sean A la matriz asociada a f, y C la matriz asociada a g, en las bases dadas. Entonces la aplicación compuesta $g \circ f : E \longrightarrow G$, definida por $\left(g \circ f\right)\left(\overline{x}\right) = g\left[f\left(\overline{x}\right)\right]$, tiene como matriz asociada a $C \cdot A$, en las bases B_E y B_G.

Si un homomorfismo $f : E \longrightarrow E$, de matriz asociada A, tiene inverso, la matriz asociada a $f^{-1} : E \longrightarrow E$ es A^{-1}.

12. CAMBIOS DE BASES

Al efectuarse cambios de base en E, en F o en ambos, la matriz del homomorfismo queda modificada obteniéndose la nueva matriz por medio de las fórmulas del cambio de base.

Si tenemos una aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$ de matriz asociada A respecto a una base B_E en E y una base B_F en F, veamos cómo queda la matriz asociada a la aplicación lineal si en E considero una nueva base B_E' y en F una nueva base B_F'.

Sea P la matriz cambio de base de B_E' en B_E en el espacio E.

Sea Q la matriz cambio de base de B_F' en B_F en el espacio F.

Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E_{B_E} & \xrightarrow{A} & F_{B_F} \\ P\uparrow & & \downarrow Q^{-1} \\ E_{B'_E} & \xrightarrow{A'} & F_{B'_F} \end{array}$$

Se cumple que: $A' = Q^{-1}AP$

Si sólo se realizara el cambio de base en el espacio vectorial E, tendríamos:

$$\begin{array}{ccc} E_{B_E} & \xrightarrow{A} & F_{B_F} \\ P\uparrow & & \downarrow \mathbf{I} \\ E_{B'_E} & \xrightarrow{A'} & F_{B_F} \end{array}$$

En este caso se cumple que: $A' = AP$

Si sólo se realizara el cambio de base en el espacio vectorial F, tendríamos:

$$\begin{array}{ccc} E_{B_E} & \xrightarrow{\quad A \quad} & F_{B_F} \\ \mathbf{I}\uparrow & & \downarrow Q^{-1} \\ E_{B_E} & \xrightarrow{\quad A' \quad} & F_{B'_F} \end{array}$$

En este caso se cumple que: $A' = Q^{-1}A$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Sean en $\mathbb{R}^4$ los vectores $\overline{u}=(2,3,2,5)$, $\overline{v}=(1,-2,4,0)$, $\overline{w}=(1,1,10/7,m)$. Calcular el valor de m para que $\overline{w}$ pertenezca al subespacio engendrado por $\overline{u}$ y $\overline{v}$.

SOLUCIÓN:

Para que el vector $\overline{w}$ pertenezca al subespacio generado por $\overline{u}$ y $\overline{v}$ es necesario que existan dos escalares α y β que cumplan lo siguiente:

$$\overline{w}=\alpha\overline{u}+\beta\overline{v}=\alpha(2,3,2,5)+\beta(1,-2,4,0)=(2\alpha+\beta,3\alpha-2\beta,2\alpha+4\beta,5\alpha)$$
.

Es decir, se tiene que dar la siguiente igualdad:

$(1,1,10/7,m)=(2\alpha+\beta,3\alpha-2\beta,2\alpha+4\beta,5\alpha)$.

Sabemos que dos vectores son iguales si coinciden componente a componente, de donde obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ccc} 2\alpha+\beta & = & 1 \\ 3\alpha-2\beta & = & 1 \\ 2\alpha+4\beta & = & 10/7 \\ 5\alpha & = & m \end{array}\right\}$$ si multiplicamos la primera ecuación por 2 y se la sumamos a la 2^o ecuación, obtenemos que: $7\alpha=3\Rightarrow\alpha=\frac{3}{7}$ y de aquí ya obtenemos, despejando por ejemplo de la 1^o ecuación que $\beta=1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$. Sólo hemos utilizado las dos primeras ecuaciones, veamos que estos valores de α y β también sastisfacen la 3^a ecuación:

$2.\frac{3}{7}+4.\frac{1}{7}=\frac{10}{7}$, luego, efectivamente, sí se cumple. Por último como también se tiene que cumplir la 4^{o} ecuación $5.\frac{3}{7}=m \Rightarrow m=\frac{15}{7}$.

2.- Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ **dada por** $f(x,y,z)=x-y-2z$**. Calcular el núcleo de** f **.**

SOLUCIÓN:

$$Ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/f(x,y,z)=0\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x-y-2z=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=y+2z\right\}$$

$$=\{(y+2z,y,z)/\ y,z\in\mathbb{R}\}=\left\langle(1,1,0),(2,0,1)\right\rangle$$

3.- Sea f **la aplicación lineal de matriz asociada** $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$**.**

Hallar la dimensión de $Im(f)$ **.**

SOLUCIÓN:

Sabemos que $\dim(Im(f))=rang(A)=rang\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -4\\ 0 & 0\end{pmatrix}=2.$

4.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ **se considera el subespacio** $V=\left\langle(1,1,a),(1,a,1),(a,1,1)\right\rangle$**. Razonar para qué valores de** a **se tiene que** $\dim(V)=2.$

SOLUCIÓN:

Estudiar la $\dim(V)$ es equivalente a estudiar el rango de la matriz cuyas columnas son los vectores de V. Sea esta matriz la siguiente:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Una condición necesaria, aunque no suficiente para que $\dim V = 2$ es que $|A| = 0$. Si desarrollamos este determinante obtenemos que: $|A| = 0 \Longleftrightarrow (a-1)^2(a+2) = 0 \Longleftrightarrow a = 1$ ó $a = -2$.

5.- Sean los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $V_1 =< \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 >$ y $V_2 =< 2\bar{v}_1 - \bar{v}_3, \bar{v}_4 >$. El sistema de vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ es linealmente dependiente y $\bar{v}_i \neq \bar{0}$ $\forall i$. Se pide justificiar la veracidad o falsedad (dando los correspondientes contraejemplos) de las siguientes afirmaciones:

a) $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$

b) $dim(V_1 \cap V_2) = 2$

c) $dim(V_1 \cap V_2) = 1$

d) $V_1 + V_2 \neq \mathbb{R}^4$

SOLUCION:

a) Falso.

Si tomamos $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,1,0)\}$

Es evidente que el vector $2\bar{v}_1 - \bar{v}_3 = (2,0,-1,0)$, está tanto en V_1 (por ser combinación lineal de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$) como en V_2.

b) Falso.

Si tomamos $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,0,0,0),(1,0,0,0)\}$

$V_2 =< 2\overline{v}_1 - \overline{v}_3, \overline{v}_4 >=< (1,0,0,0),(1,0,0,0) >=< (1,0,0,0) > \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 \cap V_2 =< (1,0,0,0) > \Rightarrow dim(V_1 \cap V_2) = 1 \neq 2.$

c) Falso.

Si tomamos $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$

$V_2 =< 2\overline{v}_1 - \overline{v}_3, \overline{v}_4 >=< (1,0,0,0),(0,1,0,0) > \Rightarrow dim(V_1 \cap V_2) = 2 \neq 1.$

d) Verdadero.

$V_1 + V_2 =< \overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4, 2\overline{v}_1 - \overline{v}_3, \overline{v}_4 >=< \overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4 >$

$dim(V_1 + V_2) < 4$ ya que $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependiente, con lo cual $V_1 + V_2 \neq \mathbb{R}^4$.

6.- ¿Cual de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ no es subespacio vectorial?

a) $L_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_2 = 2x_3 \end{matrix} \right\}$

b) $L_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$

c) $L_3 = \left\{ (4s, s, s) \in \mathbb{R}^3 \;/\; s \in R \right\}$

d) $L_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x_1 - x_2 = 1 \right\}$

SOLUCIÓN:

Para que un subconjunto sea subespacio vectorial debe cumplir que la suma de dos elementos de el también pertenezca al subconjunto y que al

multiplicar un elemento de el por un escalar también siga perteneciendo al subconjunto, es decir:

$i)\ \overline{x}+\overline{y}\in L_1,\ \forall\ \overline{x},\overline{y}\in L_1$

$ii)\ k\overline{x}\in L_1,\ \forall\ \overline{x}\in L_1, \forall\ k\in\mathbb{R}$

a) Si es un subespacio vectorial:

$$i)\ \overline{x},\overline{y}\in L_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1=x_2 \\ x_2=2x_3 \\ y_1=y_2 \\ y_2=2y_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1+y_1=x_2+y_2 \\ x_2+y_2=2(x_3+y_3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)\in L_1 \Rightarrow \overline{x}+\overline{y}\in L_1.$$

$$ii)\ \overline{x}\in L_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1=x_2 \\ x_2=x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} kx_1=kx_2 \\ kx_2=2kx_3 \end{array}\right\} \Rightarrow (kx_1,kx_2,kx_3)\in L_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\overline{x}\in L_1$$

b) Si es un subespacio vectorial:

$$i)\ \overline{x},\overline{y}\in L_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1-x_2=0 \\ x_2-x_3=0 \\ y_1-y_2=0 \\ y_2-y_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (x_1+y_1)-(x_2+y_2)=0 \\ (x_2+y_2)-(x_3+y_3)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)\in L_1 \Rightarrow \overline{x}+\overline{y}\in L_1.$$

$$ii)\ \overline{x}\in L_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1-x_2=0 \\ x_2-x_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} k(x_1-x_2)=0 \\ k(x_2-x_3)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} kx_1-kx_2=0 \\ kx_2-kx_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (kx_1,kx_2,kx_3)\in L_1 \Rightarrow k\overline{x}\in L_1.$$

c) Si es un subespacio vectorial:

$$i)\ \overline{x},\overline{y}\in L_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\overline{x}=(4s,s,s)\\ \overline{y}=(4t,t,t)\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{x}+\overline{y}=(4(s+t),s+t,s+t) \Rightarrow \overline{x}+\overline{y}\in L_1.$$

$$ii)\ \overline{x}\in L_1 \Rightarrow \overline{x}=(4s,s,s) \Rightarrow k\overline{x}=(4ks,ks,ks) \Rightarrow k\overline{x}\in L_1.$$

d) No es subespacio vectorial ya que incumple las dos propiedades (Nota: deja de ser subespacio vectorial desde que incumpla una de ellas). Veamos que no cumple la segunda.

$\overline{x}=(4,3,0)\in L_1$ y sin embargo $5\overline{x}=(20,15,0)\notin L_1$ ya que $20-15=5\neq 1$.

7.- Sea la aplicación lineal $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$g(x,y,z)=(-x+2y+z,x+z)$**,**

calcular una base de su núcleo.

SOLUCIÓN:

Por definición sabemos que el $Ker(g)$ está formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen mediante g es el vector $\overline{0}\in\mathbb{R}^2$. Es decir:

$$Ker(g)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ g(x,y,z)=(0,0)\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ (-x+2y+z,x+z)=(0,0)\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in R^3/\ \left.\begin{array}{r}-x+2y+z=0\\ x+z=0\end{array}\right\}\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x=-z \quad \text{y} \quad y=-z\right\}=$$

$$=\{(-z,-z,z)\in\mathbb{R}^3,\ \forall z\in R\}=\left\langle(-1,-1,1)\right\rangle=\left\langle(1,1,-1)\right\rangle$$

8.- Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **definida por la matriz**

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **. Estudiar si se trata de una aplicación inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.**

SOLUCIÓN:

En primer lugar estudiamos el rango de la matriz A que nos dará la dimensión de la Imagen de f .

$$rang(A) = rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{(oper.elemen.)}{=} rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim(Im(f)) = 2$, para que fuera sobreyectiva tendría que suceder que $\dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3,$ es decir, la dimensión de $Im(f)$ tiene que coincidir con la del espacio de llegada, $\mathbb{R}^3$ que es 3. Por lo tanto, ya podemos concluir que la aplicación no es sobreyectiva, porque

$\dim(Im(f)) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Al no ser sobreyectiva, tampoco puede ser biyectiva la aplicación.

La dimensión del Núcleo de f la podemos obtener de la fórmula:

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)),$

como la dimensión de $Im(f)$ es 2 y la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, concluimos que $\dim(Ker(f)) = 1$. Este resultado nos indica que f tampoco es inyectiva, pues para ello tendría que suceder que $\dim(Ker(f)) = 0$.

9.- Dados los subespacios vectoriales de R^3 definidos por $H = \langle (1,1,1),(1,2,1) \rangle$ y $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = z \}$ calcular la dimensión de $S \cap H$.

SOLUCIÓN:

Sabemos que se cumple la siguiente relación:

$\dim(H+S) = \dim H + \dim S - \dim(H \cap S)$

Tenemos que H está generado por dos vectores que son linealmente independientes, por lo tanto, $\dim H = 2$, por otro lado, se tiene que

$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = z \} \overset{(*)}{=} \{ (x,y,x), \forall x,y \in R \} = \langle (1,0,1),(0,1,0) \rangle$, es decir, S también está generado por dos vectores linealmente independientes, por lo que $\dim S = 2.$

$(*) NOTA$: En las ecuaciones de S sólo aparecen las coordenadas x y z. Un error generalizado entre los alumnos es el pensar , en este caso, que la coordenada $y = 0$. En caso de que eso sucediera vendría especificado como una ecuación más de las de S .

Sabiendo que el subespacio $H+S$ está generado por los vectores que generan a H junto con los vectores que generan a S, entonces se tiene que si colocamos esos vectores como columnas de una matriz:

$$\dim(H+S) = rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Sustituyendo estos datos en la fórmula de las dimensiones, tenemos que: $2 = 2 + 2 - \dim(H \cap S)$, es decir: $\dim(H \cap S) = 2.$

10.- Dada la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **definida por la matriz**

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **calcular la matriz asociada a** f **, respecto a las nuevas bases**

$\mathbf{B}_1=\{(3,1,0),(-1,1,1),(0,2,3)\}$ **y** $\mathbf{B}_2=\{(1,-1),(-2,3)\}$**.**

SOLUCIÓN:

La matriz A que define a la aplicación lineal inicial viene dada respecto a las bases canónicas en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{R}^2$, lo que nos están pidiendo es la matriz A' asociada a la aplicación lineal cuando la base tomada en $\mathbb{R}^3$ sea B_1, y la base tomada en $\mathbb{R}^2$, sea B_2.

Es decir, tenemos: $f:\mathbb{R}^3_{B_c} \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2_{B_c}$, y lo que nos están pidiendo es $f:\mathbb{R}^3_{B_1} \xrightarrow{A'} \mathbb{R}^2_{B_2}$, para llegar hasta este resultado, podemos pasar de $\mathbb{R}^3$ con la base B_1 a $\mathbb{R}^3$ con la base canónica B_C, mediante la matriz P cambio de base de B_1 a B_C. Esta matriz P es la siguiente: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, por otro lado podemos pasar de $\mathbb{R}^2$ con la base canónica B_C a $\mathbb{R}^2$ con la base B_2, mediante la matriz Q^{-1}, siendo Q, la matriz cambio de base de B_2 a B_C, $Q=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Esquemáticamente tenemos lo siguiente:

$$f: \mathbb{R}^3_{B_1} \text{----} \mathbb{R}^3_{B_C} \text{----} \mathbb{R}^2_{B_c} \xrightarrow{Q^{-1}} \mathbb{R}^2_{B_2}$$
$$\bar{x} \text{----} P\bar{x} \text{-----} AP\bar{x} \text{----} Q^{-1}AP\bar{x}$$

, de aquí concluimos que la matriz buscada es

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & -6 & 1 \\ 10 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

11.- Si $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **es una aplicación lineal, tal que;** $f(1,-1,2) = (2,1)$; $f(1,0,-2) = (0,1)$ **y** $f(0,0,1) = (1,0)$ **¿Cuál es el valor de** $f(-1,1,-1)$ **?**

SOLUCIÓN:

El vector $(-1,1,-1)$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores: $\{(1,-1,2),(1,0,-2),(0,0,1)\}$.

$$(-1,1,-1) = \alpha(1,-1,2) + \beta(1,0,-2) + \gamma(0,0,1)$$

De esta expresión obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = & -1 \\ -\alpha & = & 1 \\ 2\alpha - 2\beta + \gamma & = & -1 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $\alpha = -1$; $\beta = 0$; $\gamma = 1$.

Concretamente tenemos que:

$$(-1,1,-1) = -(1,-1,2) + 0(1,0,-2) + (0,0,1).$$

Por lo tanto, aplicando f se tiene que:

$$f(-1,1,-1) = f[-(1,-1,2)+0(1,0,-2)+(0,0,1)] \overset{(1)}{=}$$
$$\overset{(1)}{=} -f(1,-1,2)+0f(1,0,-2)+f(0,0,1)=$$
$$=-(2,1)+0(0,1)+(1,0)=(-1,-1)$$

(1) Esta igualdad se cumple por ser f una aplicación lineal.

12.- Dada la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **definida por la matriz**

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **Calcular la matriz asociada a** f **en las nuevas bases:**

$B_1=\{(3,0,1),(-1,1,0),(0,2,1)\}$ **y** $B_2=\{(1,0),(2,-1)\}$**.**

SOLUCIÓN:

La matriz A que define a la aplicación lineal inicial viene dada respecto a las bases canónicas en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{R}^2$, lo que nos están pidiendo es la matriz A' asociada a la aplicación lineal cuando la base tomada en $\mathbb{R}^3$ sea B_1, y la base tomada en $\mathbb{R}^2$, sea B_2.

Es decir, tenemos: $f:\mathbb{R}^3_{B_c} \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2_{B_c}$, y lo que nos están pidiendo es $f:\mathbb{R}^3_{B_1} \xrightarrow{A'} \mathbb{R}^2_{B_2}$, para llegar hasta este resultado, podemos pasar de $\mathbb{R}^3$ con la base B_1 a $\mathbb{R}^3$ con la base canónica B_C, mediante la matriz P cambio de base de B_1 a B_C. Esta matriz P es la siguiente:

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, por otro lado podemos pasar de $\mathbb{R}^2$ con la base canónica B_C a $\mathbb{R}^2$ con la base B_2, mediante la matriz Q^{-1}, siendo Q, la matriz cambio de base de B_2 a B_C, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Esquemáticamente tenemos lo siguiente:

$f : \mathbb{R}^3_{B_1} \xrightarrow{P} \mathbb{R}^3_{B_C} \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2_{B_c} \xrightarrow{Q^{-1}} \mathbb{R}^2_{B_2}$, de aquí concluimos que la matriz buscada es

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

13.- Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4).$

Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

SOLUCIÓN:

La base canónica de $\mathbb{R}^4$ es $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$. Veamos cuáles son sus imágenes mediante la aplicacion f.

$f(1,0,0,0) = (0,1,2);$ $\qquad f(0,1,0,0) = (1,1,2);$

$f(0,0,1,0) = (2,3,6);$ $\qquad f(0,0,0,1) = (2,2,4)$

por lo tanto, la matriz asociada a f en las bases canónicas es aquella cuyas columnas son las imágenes de los vectores de la base:

$A = \begin{pmatrix} f(1,0,0,0) & f(0,1,0,0) & f(0,0,1,0) & f(0,0,0,1) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

14.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **una aplicación lineal definida como** $f(x, y) = (x + y, x - y)$**. Se pide hallar la matriz asociada a** f **respecto de la base** $B' = \{(1,2),(3,2)\}$ **.**

SOLUCIÓN:

La matriz asociada a f respecto a las bases canónicas es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz cambio de base de B' a B es $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Sabemos que con el cambio de base la nueva matriz asociada viene dada por:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{9}{4} & -\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{7}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Otra forma de resolverlo:

$$f(1,2) = (3,-1) = \alpha(1,2) + \beta(3,2) \Rightarrow \alpha = -\frac{9}{4} \quad y \quad \beta = \frac{7}{4}$$

$$f(3,2) = (5,1) = \lambda(1,2) + \mu(3,2) \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{4} \quad y \quad \mu = \frac{9}{4}$$

Es decir:

$f(1,2) = (-\frac{9}{4}, \frac{7}{4})$ en la base $B' = \{(1,2),(3,2)\}$

$f(3,2) = (-\frac{7}{4}, \frac{9}{4})$ en la base $B' = \{(1,2),(3,2)\}$.

Luego: $A' = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & -\frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$

15.- Calcular la dimensión del núcleo de la aplicación lineal cuya matriz asociada es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN:

Como la matriz A es de orde $3x5$, entonces la aplicación lineal será

$f: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Sabemos que:

$$\dim(R^5) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$$

Por otro lado sabemos que:

$$\dim(Im(f)) = rang(A) = rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{(oper.elem.)}{=}$$

$$\overset{(oper.elem.)}{=} rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Luego: $5 = \dim(Ker(f)) + 2 \Rightarrow \dim(Ker(f)) = 3$

16.- Sea un sistema lineal homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas en el que la matriz del sistema, A, tiene $rango\,1$. Los vectores $(1,-1,0)$ y $(0,1,1)$ son soluciones de este sistema, ¿cuál de los siguientes vectores no es solución del sistema?

a) $(0,2,2)$ **b)** $(1,0,1)$ **c)** $(2,-1,1)$ **d)** $(2,-1,0)$

SOLUCIÓN:

Como el sistema es de tres ecuaciones con tres incógnitas y la matriz A, cumple que $rang(A)=1$ (es decir el sistema puede ser reducido a una sóla ecuación por ser las otras dos combinación lineal de ésta) , se tiene que el subespacio solución del sistema (recordamos que la solución de todo sistema homogéneo es un espacio vectorial) es de dimensión 2, sabemos que $(1,-1,0)$ y $(0,1,1)$ son vectores del subespacio solución y además son linealmente independientes, por lo tanto podemos decir que forman una base de dicho subespacio.

Luego de los vectores que nos dan, el que no sea combinación lineal de $\{(1,-1,0),(0,1,1)\}$ no será solución del sistema.

a) $(0,2,2)=0\ (1,-1,0)+2(0,1,1)$, por lo tanto $(0,2,2)$ pertenece al subespacio solución.

b) $(1,0,1)=1(1,-1,0)+1(0,1,1)$, por lo tanto $(1,0,1)$ pertenece al subespacio solución.

c) $(2,-1,1)=2(1,-1,0)+1(0,1,1)$, por lo tanto $(2,-1,1)$ pertenece al subespacio solución.

d) No existen α, $\beta\in\mathbb{R}:(2,-1,0)=\alpha(1,-1,0)+\beta(0,1,1)$, ya que tendríamos el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{rcr}\alpha & = & 2\\ -\alpha+\beta & = & -1\\ \beta & = & 0\end{array}\right\}$, de la primera y la última ecuación obtenemos que $\alpha=2$ y que $\beta=0$, pero si sustituimos

estos valores en la 2^a ecuación obtenemos que $-2+0=-1$, lo que evidentemente no es cierto, por lo que el sistema es incompatible, ya que no existen valores de α y β que verifiquen las tres ecuaciones. De este resultado deducimos que $(2,-1,0)$ no pertenece al subespacio de las soluciones del sistema homogéneo.

17.- Estudiar para qué valores de a y b los vectores $(3,0,a,-1),(1,1,0,b)$ y $(2,5,b,-4)$ de $\mathbb{R}^4$ son linealmente dependientes.

SOLUCIÓN:

Para que sean linealmente independientes la matriz que definen tiene que tener rango 3.

Dicha matriz es $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ a & 0 & b \\ -1 & b & -4 \end{pmatrix}$. Realizando transformaciones elementales obtenemos la siguiente forma escalonada reducida de A: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 3b+3a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como el rango de una matriz y el de cualquiera de sus formas escalonadas reducidas coincide, tenemos que $rang(A)=2$, si y sólo si $3b+3a=0$, es decir, si y sólo si $a=-b$.

18.- Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal que verifica: $f(1,2,1)=(1,1)$, $f(0,1,2)=(1,2)$, $f(0,0,1)=(1,-1)$. Calcular la imagen del vector $(5,2,1)$.

SOLUCIÓN:

Vamos a calcular cuál es la matriz asociada a f respecto de la base canónica:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= f((1,2,1)-2(0,1,2)+3(0,0,1)) = \\ &= f(1,2,1)-2f(0,1,2)+3f(0,0,1) = \\ &= (1,1)-2(1,2)+3(1,-1) = (2,-6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0,1,0) &= f((0,1,2)-2(0,0,1)) = \\ &= f(0,1,2)-2f(0,0,1) = (1,2)-2(1,-1) = (-1,4) \end{aligned}$$

$$f(0,0,1) = f(0,0,1)$$

Por lo tanto la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conocida la matriz sabemos que

$$f(\bar{x}) = A\bar{x} \Rightarrow f((5,2,1)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -23 \end{pmatrix}$$

19.- Estudiar si la aplicación lineal de matriz asociada $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$**, es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.**

SOLUCIÓN:

Por ser $A \in M_{3x2}(R) \Rightarrow f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se tiene que

$\dim(Im(f)) = rangA = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow f$ no es sobreyectiva.

Por la fórmula:

$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(Ker(f)) = 2 - \dim(Im(f)) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Ker(f) = \left\{\overline{0}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es inyectiva.

A pesar de ser inyectiva, por no ser sobreyectiva, no podrá ser biyectiva.

20.- Para la aplicación $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **la aplicación lineal definida por:**

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2+2x_3+2x_4, x_1+x_2+3x_3+2x_4, 2x_1+2x_2+6x_3+4x_4)$

calcular unas ecuaciones del subespacio $Im(f)$ **.**

SOLUCIÓN:

$Im(f) = \left\{\overline{y} \in R^3 / \exists \overline{x} \in \mathbb{R}^4 : f\left(\overline{x}\right) = \overline{y}\right\} =$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \overline{y} = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 / \exists\ \overline{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \\ (x_2+2x_3+2x_4, x_1+x_2+3x_3+2x_4, 2x_1+2x_2+6x_3+4x_4) \\ = \left(y_1,y_2,y_3\right) \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / \exists (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \\ \left. \begin{array}{rcl} x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & y_1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & y_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 & = & y_3 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \overset{(1)}{=}$$

NOTA: La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$Rang(A) = rang \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ y la matriz ampliada viene dada por

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & | \, y_1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & | \, y_2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & | \, y_3 \end{pmatrix}$,

$rang(A^*) = rang \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & y_1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - 2y_2 \end{pmatrix}$

El sistema será compatible cuando $rang(A) = rang(A^*) = 2$ y eso sólo ocurre cuando $y_3 - 2y_2 = 0$ por lo que se obtiene que:

$$\overset{(1)}{=} \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_3 - 2y_2 = 0 \right\}$$

21.- Calcular una base para el núcleo de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4)$$

SOLUCIÓN:

$$Ker(f)=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\in\mathbb{R}^4/f\left(\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\right)=\left(0,0,0\right)\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\in\mathbb{R}^4/\\(x_2+2x_3+2x_4,x_1+x_2+3x_3+2x_4,2x_1+2x_2+6x_3+4x_4)=\\=\left(0,0,0\right)\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\in\mathbb{R}^4/\begin{array}{rcl}x_2+2x_3+2x_4&=&0\\x_1+x_2+3x_3+2x_4&=&0\\2x_1+2x_2+6x_3+4x_4&=&0\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\in\mathbb{R}^4/\begin{array}{rcl}x_1\qquad+x_3&=&0\\x_2+\quad2x_3+2x_4&=&0\end{array}\right\}=$$

$$=\left\langle\left(-1,-2,1,0\right),\left(0,-2,0,1\right)\right\rangle=$$

$$=\left\langle\left(1,2,-1,0\right),\left(0,2,0,-1\right)\right\rangle.$$

22.- Consideremos los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$**:**
$L=\left\langle\left(-1,0,2\right),(0,1,0)\right\rangle$ **y** $M=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3/x=y\right\}$. **Estudiar cuándo el vector** $\overline{x}=(a,-1,2)$ **pertenece al subespacio** $L\cap M$ **.**

SOLUCIÓN:

Si $a=-1$

Entonces $\overline{x}=(-1,-1,2)$, cumple que como sus dos primeras componentes coinciden entonces $\overline{x}\in M$, veamos si $\overline{x}\in L$. Para ello tendríamos que encontrar $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ tal que:

$$\overline{x}=\alpha\left(-1,0,2\right)+\beta(0,1,0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-1,-1,2)=(-\alpha,0,2\alpha)+(0,\beta,0)=(-\alpha,\beta,2\alpha)\Rightarrow$$

$\Rightarrow (-1,-1,2) = (-\alpha, \beta, 2\alpha) \Rightarrow \alpha = 1 \quad y \quad \beta = -1$, es decir $\overline{x} \in L$.

Obtenemos que $\overline{x} \in L \cap M$.

23.- Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ **y sea** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ **la aplicación lineal de matriz asociada** A **con respecto a las bases canónicas. Encontrar una base de** $Im(f)$

SOLUCIÓN:

Sabemos que las columnas de la matriz A nos dan un sistema generador de $Im(f)$, por lo que un sistema generador es $\{(1,1,1),(0,-1,-2),(0,1,2)\}$, sin embargo en el ejercicio se nos pregunta por una base, por lo que a la condición de ser generador hay que añadirle ser linealmente independientes. El vector $(0,-1,-2) = -1(0,1,2)$, por lo que podría ser extraído del sistema por ser combinación lineal de uno de ellos.

Nos quedaríamos con $\{(1,1,1),(0,1,2)\}$ que sigue siendo sistema generador de $Im(f)$ y además es linealmente independiente, ya que los únicos α, y $\beta \in \mathbb{R}$ que cumplen que: $\alpha(1,1,1) + \beta(0,1,2) = (0,0,0)$ son $\alpha = 0$, y $\beta = 0$. También se podría haber razonado viendo que el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es dos, por lo tanto los dos vectores que definen sus columnas son linealmente independientes.

Luego una base de $Im(f)$ es $\{(1,1,1),(0,1,2)\}$.

24.- Consideremos los elementos del espacio vectorial P_2, de los polinomios reales de grado a lo sumo 2, $p(x)=1$, $q(x)=1+x$, y $r(x)=1-x^2$. Razonar la veracidad o falsedad de las afirmaciones siguientes:

a) $\{p(x),q(x),r(x)\}$ es un sistema linealmente independiente.

b) El subespacio vectorial de P_2 engendrado por $\{p(x),q(x),r(x)\}$ tiene dimensión 2.

c) El subespacio vectorial engendrado por $\{p(x),q(x),r(x)\}$ tiene dimensión 1.

SOLUCIÓN:

a) Verdadera.

Vamos a igualar una combinación lineal de los tres vectores al polinomio $0=0+0x+0x^2$. Para que sean linealmente independientes los escalares de la combinación nos tendrían que dar 0.

Sean $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R} : \alpha p(x)+\beta q(x)+\gamma r(x)=0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha=\beta=\gamma=0$

Si $\alpha p(x)+\beta q(x)+\gamma r(x)=0 \Rightarrow \alpha 1+\beta(1+x)+\gamma(1-x^2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma+\beta x-\gamma x^2=0$

para que un polinomio sea idénticamente nulo, tiene que suceder que los coeficientes que acompañan a las diferentes potencias de la variable sean 0 y además el término independiente también sea 0.

Por lo tanto, obtenemos que: $\left.\begin{array}{rcl}\alpha+\beta+\gamma & = & 0\\ \beta & = & 0\\ -\gamma & = & 0\end{array}\right\} \Rightarrow \gamma=\beta=0$ y sustituyendo en la 1^a ecuación se tiene: $\alpha=0$ de aquí obtenemos que el sistema $\{p(x),q(x),r(x)\}$ es linealmente independiente.

b) Falso.

Ya hemos visto que los tres vectores son linealmente independientes por lo tanto, ellos serán una base del subespacio que generen, y esto conduce a que dicho subespacio tendrá dimensión 3.

c) Falso.

El razonamiento es el mismo que en b).

25.- Si $\{\overline{u},\overline{v}\}$ y $\{\overline{v},\overline{w}\}$ son dos sistemas libres en un espacio vectorial U, justificar razonadamente si los siguientes apartados son verdaderos o falsos:

a) $\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}$ es un sistema libre.

b) $\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}$ es un sistema ligado.

c) $\{\overline{u},\overline{u},\overline{w}\}$ es un sistema libre.

SOLUCIÓN:

a) Falso.

Valga el siguiente contraejemplo: Sea $U=\mathbb{R}^3$, $\{\overline{u},\overline{v}\}=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ y $\{\overline{v},\overline{w}\}=\{(0,1,0),(2,0,0)\}$, se cumple que

ambos sistemas son libres, sin embargo, $\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}=\{(1,0,0),(0,1,0),(2,0,0)\}$ no es un sistema libre, ya que $\overline{w}=2\overline{u}$.

b) Falso.

Valga el siguiente contraejemplo: Sea $U=\mathbb{R}^3$, $\{\overline{u},\overline{v}\}=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ y $\{\overline{v},\overline{w}\}=\{(0,1,0),(0,0,1)\}$, se cumple que ambos sistemas son libres y $\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es un sistema libre, ya que se trata de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

c) Falso.

Un sistema de la forma $\{\overline{u},\overline{u},\overline{w}\}$ nunca puede ser libre, porque dos de sus vectores son linealmente dependiente $\overline{u}=1.\overline{u}$.

26.- Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$L=\langle(1,0,2,0),(-1,2,1,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$ **y**

$S=\{(x,y,z,t)/x-y=0\}$**. Se pide la dimensión de $L\cap S$.**

SOLUCIÓN:

Tenemos que $S=\{(x,y,z,t)/x-y=0\}=\{(x,x,z,t)/x,z,t\in\mathbb{R}\}=$

$=\langle(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$.

Para calcular $\dim(L\cap S)$, lo que vamos a hacer es calcular $\dim(L+S)$ y a continuación aplicar la fórmula:

$\dim(L+S)=\dim(L)+\dim(S)-\dim(L\cap S)\Rightarrow$

$\Rightarrow\dim(L\cap S)=\dim(L)+\dim(S)-\dim(L+S).$

Tenemos que:

$$\dim(L) = Rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\dim(S) = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$L+S$ está generado por los vectores que generan a L junto con los vectores que generan a S, por lo tanto:

$$L+S = \langle (1,0,2,0), (-1,2,1,1), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0) \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(L+S) =$$

$$= Rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

Sustituyendo estos datos en la fórmula de las dimensiones, obtenemos que:

$$\dim(L \cap S) = 4 + 3 - 4 = 3$$

Otra forma de haberlo razonado es, una vez sabido que $\dim(L) = 4$, como L es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, se obtiene que $L = \mathbb{R}^4 \Rightarrow L \cap S = \mathbb{R}^4 \cap S = S \Rightarrow \dim(L \cap S) = \dim(S) = 3$

27.- Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **definida por** $f(x,y,z)=(x+y,x-z)$**. Hallar el conjunto imagen de** f **.**

SOLUCIÓN:

Sabemos que:

$$Im(f)=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 / \exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f((x,y,z))=(a,b)\right\}=$$

$$=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 / \exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : ((x+y,x-z))=(a,b)\right\}=$$

$$=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 / \exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x+y=a \\ x-z=b \end{matrix}\right\}=$$

$$=\left\{(x+y,x-z) / x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\langle(1,1),(1,0),(0,-1)\right\rangle=\left\langle(1,0),(0,-1)\right\rangle=$$

$$=\left\langle(1,0),(0,1)\right\rangle=\mathbb{R}^2$$

28.- Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ **la aplicación lineal definida por** $f(x,y,z)=3x-2y+5z$**. Encontrar una base del núcleo de** f **.**

SOLUCIÓN:

$$Ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f((x,y,z))=0\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 3x-2y+5z=0\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=(2y-5z)/3\right\}=$$

$$=\left\{((2y-5z)/3,y,z)\in\mathbb{R}^3 / y,z\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\langle\left(\frac{2}{3},1,0\right),(-\frac{5}{3},0,1)\right\rangle=\left\langle(2,3,0),(-5,0,3)\right\rangle$$

29.- Sea E **un espacio vectorial sobre** K **de dimensión** n**. Sea** f **un endomorfismo de** E **y sea** M **su matriz asociada. Razonar la veracidad o no de cada uno de los siguientes apartados:**

a) M **es invertible** $\Longleftrightarrow$ f **es inyectivo.**

b) M **nunca es invertible.**

c) Al ser f **un endomorfismo es siempre biyectivo.**

d) M **siempre es invertible.**

SOLUCIÓN:

a) Verdadero.

i) Veamos que si f es inyectiva $\Rightarrow M$ es invertible.

Tenemos la fórmula:

$\dim(E) = \dim(Im(f)) + \dim(Ker(f))$.

Si f es inyectiva, sabemos que $Ker(f) = \{\bar{0}\} \Rightarrow \dim(Ker(f)) = 0$, sustituyendo este dato en la fórmula anterior vemos que $\dim(E) = \dim(Im(f))$. Por otro lado, sabemos que $\dim(Im(f)) = rang(M)$, luego

$rang(M) = \dim(E) = n$, y como $M \in M_{nxn}(R)$, se deduce que $|M| \neq 0$ y esta propiedad ya implica que M es invertible.

ii) Veamos que si M es invertible $\Rightarrow f$ es inyectiva.

Si M es invertible $\Rightarrow |M| \neq 0$, por lo tanto, $rang(M) = n$, y como $rang(M) = \dim(Im(f))$, obtenemos que $\dim(Im(f)) = n$. Sustituyendo este dato en la fórmula de las dimensiones:

$\dim(E) = \dim(Im(f)) + \dim(Ker(f))$, se llega a que $n = n + \dim(Ker(f))$, es decir,

$\dim(Ker(f))=0$ y el único subespacio de dimensión 0 es el subespacio nulo: $Ker(f)=\{\overline{0}\}$ y esa es la condición necesaria y suficiente para que f sea inyectiva.

b) Falso.

Ya hemos visto en a) que cuando f es inyectiva $\Rightarrow M$ es invertible.

c) Falso.

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida de la siguiente forma: $f((x,y))=(x-y,x-y)$

Veamos que f es un endomorfismo. Para ello sólo habría que comprobar que es lineal ya que evidentemente es aplicación.

$$f(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y})\overset{?}{=}\alpha f(\overline{x})+\beta f(\overline{y})$$

Supongamos que $\overline{x}=(x_1,x_2)$ e $\overline{y}=(y_1,y_2)$, entonces:

$$\begin{aligned}
f(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}) &= f(\alpha(x_1,x_2)+\beta(y_1,y_2)) = f((\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2)) = \\
&= (\alpha x_1+\beta y_1-(\alpha x_2+\beta y_2),\alpha x_1+\beta y_1-(\alpha x_2+\beta y_2)) = \\
&= ((\alpha x_1-\alpha x_2)+(\beta y_1-\beta y_2),(\alpha x_1-\alpha x_2)+(\beta y_1-\beta y_2)) = \\
&= (\alpha x_1-\alpha x_2,\alpha x_1-\alpha x_2)+(\beta y_1-\beta y_2,\beta y_1-\beta y_2) = \\
&= \alpha(x_1-x_2,x_1-x_2)+\beta(y_1-y_2,y_1-y_2) = \\
&= \alpha f(x_1,x_2)+\beta f(y_1,y_2)=\alpha f(\overline{x})+\beta f(\overline{y})
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, vamos a comprobar que f no es biyectiva.

$$Ker(f) = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^2 / f(\overline{x}) = \overline{0} \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = (0,0) \right\} =$$
$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-y, x-y) = (0,0) \right\} =$$
$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y \right\} = <(1,1)>$$

Hemos obtenido que $Ker(f) \neq \left\{ \overline{0} \right\}$, por lo que f no es inyectivo, y esto significa que no puede ser biyectivo.

d) Falso.

En el apartado a) ya hemos demostrado que M sólo es invertible cuando f sea inyectiva.

30.- Sean $f: V \longrightarrow W$ y $g: W \longrightarrow U$, las aplicaciones lineales con matrices asociadas A y B respectivamente. Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal $g \circ f: V \to U$.

SOLUCIÓN:

La matriz asociada a $g \circ f$, será M, tal que $g \circ f(\overline{x}) = M\overline{x}$

Ahora bien, sabemos que:

$$g \circ f(\overline{x}) = g(f(\overline{x})) \overset{(f(\overline{x}) = A\overline{x})}{=} g(A\overline{x}) \overset{(g(\overline{y}) = B\overline{y})}{=} B(A\overline{x}) = (BA)\overline{x}$$

Luego, la matriz asociada a $g \circ f$ es BA.

31.- Sea f una aplicación lineal. Razonar si de los siguientes apartados puede haber alguno(s) verdadero(s):

a) Si $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ nunca será sobreyectiva.

b) Si $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ siempre es biyectiva.

c) Si $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ siempre es inyectiva.

d) Si $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nunca será sobreyectiva.

SOLUCIÓN:

a) Verdadero.

Por la fórmula de las dimensiones sabemos que:

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$, si la aplicación fuera sobreyectiva tendríamos que $Im(f) = \mathbb{R}^5$, por lo tanto $\dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^5) = 5$. Luego, la fórmula de las dimensiones nos quedaría como sigue: $3 = \dim(Ker(f)) + 5$, de donde se deduce que $\dim(Ker(f)) = -2$, lo que no puede suceder, ya que la dimensión de todo espacio vectorial es siempre un número entero no negativo.

b) Falso.

Como contraejemplo utilizaremos la siguiente aplicación: $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por: $f((x,y,z)) = (x,0,0)$.

Veamos en primer lugar que f es una aplicación lineal.

i) f es aplicación:

i.1) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \exists (x,0,0) \in \mathbb{R}^3 : f((x,y,z)) = (x,0,0)$, es decir, todo elemento de $\mathbb{R}^3$ tiene su imagen en $\mathbb{R}^3$.

i.2) Si $(x,y,z) = (x',y',z')$, entonces sus componentes coinciden, es decir: $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, en particular nos interesa saber que $x = x'$, de donde se obtiene que $(x,0,0) = (x',0,0)$, es decir,

$f((x,y,z)) = f((x',y',z'))$. Con este razonamiento lo que se ha visto es que cada elemento de $\mathbb{R}^3$ tiene una única imagen en $\mathbb{R}^3$.

$ii)$ f es lineal:

$$f(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y})\overset{?}{=}\alpha f(\overline{x})+\beta f(\overline{y})$$

Supongamos que $\overline{x}=(x,y,z)$ e $\overline{y}=(x',y',z')$, entonces tendríamos que: $f(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y})=f((\alpha x,\alpha y,\alpha z)+(\beta x',\beta y',\beta z'))=$

$= f((\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z'))=(\alpha x+\beta x',0,0)=$

$=(\alpha x,0,0)+(\beta x',0,0)=\alpha(x,0,0)+\beta(x',0,0)=$

$=\alpha f((x,y,z))+\beta f((x',y',z'))=\alpha f(\overline{x})+\beta f(\overline{y})$

Veamos que f no es inyectiva

Sean por ejemplo $\overline{x}=(1,2,3)$ e $\overline{y}=(1,3,4)$ evidentemente se tiene que $\overline{x}\neq\overline{y}$ y sin embargo, $f(\overline{x})=(1,0,0)=f(\overline{y})$, luego f no es inyectiva.

Por no ser inyectiva, ya no será biyectiva.

c) Falsa.

De nuevo recurrimos a la fórmula:

$\dim(\mathbb{R}^4)=\dim(Ker(f))+\dim(Im(f))$, si f fuera inyectiva, sabemos que $Ker(f)=\{\overline{0}\}$, es decir, $\dim(Ker(f))=0$, y sustituyendo este dato en la anterior fórmula, se obtiene que: $\dim(\mathbb{R}^4)=\dim(Im(f))$, por lo tanto: $\dim(Im(f))=4$, sin embargo, $Im(f)\subseteq\mathbb{R}^3$ de donde se deduce que $\dim(Im(f))\leq\dim(\mathbb{R}^3)=3$. De este razonamiento se concluye que si $f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal, nunca puede ser inyectiva.

d) Falso.

Como contraejemplo nos sirve la aplicación identidad: $i:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^3 : i(\overline{x}) = \overline{x}$. Es evidente que es una aplicación lineal y es biyectiva, por lo tanto, en particular será sobreyectiva.

32.- Dado un endomorfismo $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definido como $f(x,y,z,t)=(x-y-t,\ \ 2x-y-z-t,\ \ x-y-t,\ \ z-x)$, demostrar que $Ker(f)=Im(f)$.

SOLUCIÓN:

La matriz asociada a este endomorfismo es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sabemos que $A=\left(f(\overline{e}_1)\ f(\overline{e}_2)\ f(\overline{e}_3)\ f(\overline{e}_4)\right)$, y que el conjunto $Im(f)$ esta generado por las imágenes de los vectores de la base, es decir, $Im(f)=<f(\overline{e}_1), f(\overline{e}_2), f(\overline{e}_3), f(\overline{e}_4)>$, luego de este conjunto podemos extraer una base de $Im(f)$.

$$rango(A)=rango\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=rango\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2.$$

Como $f(\bar{e}_1)$ y $f(\bar{e}_2)$ son linealmente independientes, podemos elegirlos como una base de $Im(f)$.

Nota: También se puede tomar como base $\{f(\bar{e}_2), f(\bar{e}_3)\}$ pero no $\{f(\bar{e}_2), f(\bar{e}_4)\}$, ya que $f(\bar{e}_2) = f(\bar{e}_4)$.

$$Ker(f) \quad = \left\{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 / A\bar{x} = 0\right\} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{array}{r} x-y-t=0 \\ 2x-y-z-t=0 \\ x-y-t=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{array}{r} x-y-t=0 \\ 2x-y-z-t=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{array}{r} 2x-y-z-t=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{array}{r} y=z-t \\ x=z \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{(z, z-t, z, t) \ / \ z, t \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$=< (1,1,1,0), (0,-1,0,1) >=< \bar{w}_1, \bar{w}_2 >$$

Para ver que $Ker(f) = Im(f)$, podemos comprobar que los vectores de la base de $Im(f)$ verifican las ecuaciones del $Ker(f)$, con lo cual también sirven como base de $Ker(f)$.

Otra forma de verlo es juntar las bases de $Ker(f)$ e $Im(f)$, en una matriz $Q_{4x4} = \left(\bar{w}_1 \ \bar{w}_2 \ f(\bar{e}_1) \ f(\bar{e}_2) \right)$ y observar que tiene rango 2, lo cual nos esta diciendo que $\bar{w}_1$ y $\bar{w}_2$ son combinación lineal de $f(\bar{e}_1)$ y $f(\bar{e}_2)$ y viceversa, ambos espacios estarían contenidos el uno en el otro, luego son iguales.

33.- Dado los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $L=<(1,0,0,0),(1,2,1,0)>=<\bar{u}_1,\bar{u}_2>$ y $M=<(1,a,1,-2),(0,2,1,-a)>=<\bar{v}_1,\bar{v}_2>$, estudiar para qué valores de a se tiene que $L\oplus M=\mathbb{R}^4$.

SOLUCIÓN:

$$L\oplus M=\mathbb{R}^4 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} L+M=\mathbb{R}^4 \\ L\cap M=\{\bar{0}\}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} dim(L+M)=4 \\ dim(L\cap M)=0\end{matrix}\right\} \quad (1)$$

Veamos en primer lugar cuál es la dimensión de L.

Un sistema generador suyo es $\{(1,0,0,0),(1,2,1,0)\}$, para que este sistema sea una base habría que comprobar que los dos vectores son linealmente independientes, o lo que es equivalente que el rango de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es 2. Ahora bien, en A se tiene el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$ que es de orden 2, por lo tanto $Rang(A)=2$, es decir, $\dim(L)=2$.

Veamos ahora cuál es la dimensión de M.

Un sistema generador de dicho subespacio es el $\{(1,a,1,-2),(0,2,1,-a)\}$ para que fuera base tendrían que ser linealmente independientes, o equivalentemente, que $Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -a \end{pmatrix}=2$, ahora bien, esto sí se cumple

ya que existe el menor de orden 2 siguiente: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, luego, $\dim(M) = 2$.

Sabemos que: $dim(L+M) = dim(L) + dim(M) - dim(L \cap M)$

$dim(L+M) = 2 + 2 - dim(L \cap M)$

$dim(L+M) = 4 - dim(L \cap M)$

Las dos condiciones de (1) se cumplirán simultáneamente, es decir,

$dim(L+M) = 4 \Leftrightarrow dim(L \cap M) = 0 \Leftrightarrow$ Los vectores que generan a L y los vectores que generan a M son linealmente independientes.

Juntamos las bases de L y M en una matriz $A = \left(\bar{u}_1 \, \bar{u}_2 \, \bar{v}_1 \, \bar{v}_2 \right)$ y cuando tenga rango 4, los vectores $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ serán linealmente independientes con $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & a \end{pmatrix}$, A tendrá rango 4, si y sólo si su determinante es distinto de cero.

$|A| = 2a - a^2$; $|A| = 0 \Leftrightarrow 2a - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $a = 2$.

34.- Dado los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $L = < (-1,2,0,3), (0,1,2,0) > = < \bar{u}_1, \bar{u}_2 >$ y $M = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^4 / \ \bar{x} = (a,0,2a,b),\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$, calcular $L \cap M$.

SOLUCIÓN:

$M = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^4 / \ \bar{x} = (a,0,2a,b),\ a,b \in \mathbb{R} \right\} = < (1,0,2,0), (0,0,0,1) > =$

$=<\overline{v}_1,\overline{v}_2>$

Sabemos que:

$dim(L+M)=rango(\overline{u}_1\,\overline{u}_2\,\overline{v}_1\,\overline{v}_2)=$

$$=rango\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=rango\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=4$$

Además también sabemos que:

$$\begin{aligned} dim(L+M)= &\quad dim(L)+dim(M)-dim(L\cap M)\\ 4= &\quad 2+2-dim(L\cap M)\\ 4= &\quad 4-dim(L\cap M)\Rightarrow\\ \Rightarrow dim(L\cap M)=0 &\quad \Rightarrow L\cap M=\{\overline{0}\}\end{aligned}$$

35.- Siendo $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x-2y+3z=0\right\}$, **¿Con cual de los siguientes subespacios se verifica que** $F\oplus H=\mathbb{R}^3$ **?**

a) $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x-y+3z=0\right\}$

b) $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ \begin{matrix}2x+y+z=0\\ y-z=0\end{matrix}\right\}$

c) $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x=0\right\}$

d) $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x=y=z\right\}$

SOLUCIÓN:

$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x-2y+3z=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x=2y-3z\right\}=$

$=<(2,1,0),(-3,0,1)>$, luego $dim(F)=2,$ para que $F\oplus H=\mathbb{R}^3,$ H tendrá que cumplir que:

$i)\ dim(\mathbb{R}^3) = dim(F) + dim(H) \Leftrightarrow\ 3 = 2 + dim(H)\ \Leftrightarrow dim(H) = 1.$

$ii)\ \ H \cap F = \{\bar{0}\}$

a) Con este H no se cumple, ya que $dim(H) = 2$.

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + 3z = 0\right\} = \ \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y - 3z\right\} =$$

$$=< (1,1,0), (-3,0,1) >$$

b) Con este H tampoco se cumple, ya que:

$$= \ \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \begin{matrix} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \begin{matrix} x = -z \\ y = z \end{matrix}\right\} =$$

$$=< (-1,1,1) >$$

ahora bien $(-1,1,1) \in F$ ya que verifica sus ecuaciones

(en este caso solo es una), luego $H \cap F \neq \{\bar{0}\}$

c) Este subespacio no es válido porque $dim(H) = 2$.

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 0\right\} =< (0,1,0), (0,0,1) >$$

d) Este subespacio sí lo cumple:

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\right\} =$$

$$=< (1,1,1) > \Rightarrow dim(H) = 1.$$

$$dim(L \cap F) = \quad dim(L) + dim(F) - dim(L + F) =$$

$$= 1 + 2 - rango\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 - 3 = 0$$

$\Rightarrow H \cap F = \{\bar{0}\}$

36.- Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **la aplicación lineal tal que:**

$f(1,2)=(3,-1,5)$ **y** $f(0,1)=(2,1,-1)$**.**

Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ **, calcular la expresión de** $f(x,y)$ **.**

SOLUCIÓN:

Conocemos la matriz asociada a f respecto de la base $B^*=\{(1,2),(0,1)\}$, es $A^*=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, y nos la piden respecto de la base $B=\{(1,0),(0,1)\}$.

Como el $(0,1)$ esta en las dos bases solo nos faltaría cononer la imagen del $(1,0)$, escribiremos $(1,0)$ como combinación lineal de los vectores de la base B^*,

$$(1,0)=\alpha(1,2)+\beta(0,1)\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha+0\beta=1 \\ 2\alpha+\beta=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=1 \text{ y } \beta=-2, \text{ por tanto}$$

$$\begin{aligned} f(1,0) &= f[\alpha(1,2)+\beta(0,1)] = f[(1,2)-2\beta(0,1)] = \\ &= f(1,2)-2f(0,1)=(3,-1,5)-2(2,1,-1)=(-1,-3,7), \end{aligned}$$

luego la matriz asociada a f respecto de B es

$$A=\left(f(1,0),f(0,1)\right)=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Otra forma de haber llegado al mismo resultado es mediante la matriz cambio de base.

La matriz cambio de base de B^* a la base canónica B es $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,

la matriz cambio de base de B a B^* será por tanto $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$$(\mathbb{R}^2, B) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, B^*) \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$
$$\overline{x} \longrightarrow P^{-1}\overline{x} \longrightarrow f(P^{-1}\overline{x}) = A^*(P^{-1}\overline{x})$$

$$f(P^{-1}\overline{x}) \quad = A^*(P^{-1}\overline{x}) = \begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\overline{x} =$$
$$= \begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\overline{x} =$$
$$= \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\\ 7 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+2y\\ -3x+y\\ 7x-y\end{pmatrix}$$

37.- Sean las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por:

$\mathbf{f(x,y,z) = (0, x-4y, 2x+y-2z)}$;
$g(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$; $h(x,y,z) = (x,y,z)$ **,**

calcular la matriz asociada a la aplicación $[(gog)-h]of$ en las bases canónicas .

SOLUCIÓN:

La matriz asociada a f es $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, a g es

$B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y a h es $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ La matriz asociada a $[(gog)-h]of$ será:

$[(B\cdot B)-C]\cdot A=$

$$=\left[\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 9 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Otra forma de llegar al mismo resultado es hallar la expresión de la funcion $[(gog)-h]of$:

$$[(gog)-h]of\left(\overline{x}\right)=(gog)of\left(\overline{x}\right)-hof\left(\overline{x}\right)=gogof\left(\overline{x}\right)-hof\left(\overline{x}\right)=$$

$$=gog\left(0,x-4y,2x+y-2z\right)-h\left(0,x-4y,2x+y-2z\right)=$$

$$=g\left(3.0,0-(x-4y),(x-4y)+(2x+y-2z)\right)-\left(0,x-4y,2x+y-2z\right)=$$

$$=g\left(0,-x+4y,3x-3y-2z\right)-\left(0,x-4y,2x+y-2z\right)=$$

$$=\left(0,x-4y,2x+y-2z\right)-\left(0,x-4y,2x+y-2z\right)=(0,0,0)$$

38.- Sean los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$L=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+3y-z=0\right\}$ **y** $M=\left\{(\mu,0,3\mu)\in\mathbb{R}^3\ /\mu\in\mathbb{R}\right\}$ **.**

Calcular $L\cap M$.

SOLUCIÓN:

$$L = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x+3y-z=0\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x=-3y+z\right\} =$$

$$= \left\{(-3y+z,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ y,z\in\mathbb{R}\right\} = <(1,0,1),(-3,1,0)> = <\overline{u}_1,\overline{u}_2>$$

$$M = \left\{(\mu,0,3\mu)\in\mathbb{R}^3 \ / \ \mu\in\mathbb{R}\right\} = <(1,0,3)> = <\overline{v}_1>$$

$L\cap M$, son los vectores de $\mathbb{R}^3$ que cumplan tanto las ecuaciones de L como de M, es decir,

$$L\cap M = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ \begin{array}{c} x-3y-z=0 \\ x-3z=0 \\ y=0 \end{array}\right\} = \{(0,0,0)\}$$

También podíamos haber llegado a la misma conclusión calculando la dimensión de $L\cap M$. Sabemos que $L+M$ esta generado por la unión de sus bases, luego:

$$dim(L+M) = rango(\overline{u}_1\,\overline{u}_2\,\overline{v}_1) = rango\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= rango\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

Como además sabemos que:

$$dim(L+M) = dim(L)+dim(M)-dim(L\cap M) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dim(L\cap M) = dim(L)+dim(M)-dim(L+M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dim(L\cap M) = 2+1-3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\cap M = \{\overline{0}\}$$

BIBLIOGRAFIA

ANZOLA, M.; CARUNCHO, J.; PÉREZ-CANALES, G. (1981). *Problemas de Álgebra (Tomos 1-7)*. Madrid. SSAG.

BURGOS, J. (1999). *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana*. Madrid. McGraw-Hill.

CARBO, R.; DOMINGO, LL. (1987). *Álgebra Matricial y Lineal*. España. McGraw-Hill.

DE LA VILLA, A. (1994). *Problemas de Álgebra*. Madrid. Clagsa.

ESPADA BROS, E. (1984). *Problemas resueltos de Álgebra*. Barcelona. EUNIBAR.

FLAQUER, J; OLAIZOLA, J; OLAIZOLA, J. (1996*). Curso de Álgebra Lineal*. Navarra EUNSA.

FRALEIGH, J.B.; BEAUREGARD, R.A. (1989). *Álgebra Lineal*. U.S.A. Addison-Wesley Iberoamericana.

GARCÍA, J.; LÓPEZ, M. (1990). *Álgebra Lineal y Geometría*. Alcoy. Marfil.

GRANERO, F. (1994). *Álgebra y Geometría Analítica*. Madrid . McGraw-Hill. GROSSMANN, S.I. (1996). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. México. McGraw-Hill.

GUERRA, N.; LÓPEZ, B. (1999). Problemas resueltos tipo test de Álgebra Lineal (Con esquemas teóricos). Las Palmas de G.C. El Libro Técnico.